Domaines (ensembles de définition) des fonctions

Prérequis :

Le domaine d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f(x) existe.
Voici les cas les plus importants dans lesquels **f(x)** **n'existe pas** :

Un dénominateur s'annulle :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ x &\neq 0 \\ D_f &= \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x+3} \\ x+3 &\neq 0 \\ x &\neq -3 \\ D_g &= \mathbb{R}\setminus\{-3\} \end{aligned}$$

☞ **Exercices**
☞ **Page suivante**

L'argument d'une racine carrée est négatif :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ x &\geq 0 \\ D_f &= \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1-x} \\ 1-x &\geq 0 \\ x &\leq 1 \\ D_g &=]-\infty, 1] \end{aligned}$$

☞ **Exercices**

L'argument d'un logarithme est négatif ou nul :

$$\begin{aligned} f(x) &= lnx \\ x &> 0 \\ D_f &= \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= ln(x-2) \\ x-2 &> 0 \\ x &> 2 \\ D_g &= [2, \infty[\end{aligned}$$

☞ **Exercices**

Trouver les domaines des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{x}{3} - x^2 + x - 5 \\
f_1(x) &= \frac{x}{2x-6} - 1 \\
f_2(x) &= \frac{x^2}{x+2} - \frac{1}{x} \\
f_3(x) &= \frac{2}{(5-x)(x+4)-8+x^2} \\
f_4(x) &= \frac{3x+1}{x^2-4} \\
f_5(x) &= \frac{5}{x^2+1} \\
f_6(x) &= \frac{1}{x^2-4x+3} \\
f_7(x) &= \frac{1}{x^2-2x+1} \\
f_8(x) &= \frac{1}{x^2-x+1} \\
f_9(x) &= \frac{3x+1}{x^2+4x-5} + \frac{1}{x^2} \\
f_{10}(x) &= \frac{1}{\frac{3x+1}{x-2}}
\end{aligned}$$

☞ **Réponses**

Trouver les domaines des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = \sqrt{1-2x}$$
$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2x}{3}}$$
$$f_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$
$$f_3(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$$
$$f_4(x) = \sqrt{4x^2-8x}$$
$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-4}$$
$$f_6(x) = \sqrt{-\frac{1}{x}}$$
$$f_7(x) = \sqrt{-x^2}+2x^4$$
$$f_8(x) = -\sqrt{x-x^3}$$
$$f_9(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$$
$$f_{10}(x) = \sqrt{-2x^2+x-1}$$

☞ **Réponses**

Trouver les domaines des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = ln(1 - 2x)$$
$$f_1(x) = ln(\frac{2x}{3})$$
$$f_2(x) = \frac{lnx}{9x^2 - 1}$$
$$f_3(x) = \frac{ln(1 - x)}{x + 1}$$
$$f_4(x) = ln(4x^2 - 8x)$$
$$f_5(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{lnx}$$
$$f_6(x) = ln(-\frac{1}{x})$$
$$f_7(x) = ln(-x^2) + 2x^4$$
$$f_8(x) = -ln(x - x^3)$$
$$f_9(x) = ln(1 - lnx)$$
$$f_{10}(x) = ln(2x^2 + x - 1)$$

☞ **Réponses**

Réponses :

$$\begin{aligned}
&D_{f0}(x) = \mathbb{R}\\
&D_{f1}(x) = \mathbb{R}\backslash\{-3\}\\
&D_{f2}(x) = \mathbb{R}\backslash\{-2, 0\}\\
&D_{f3}(x) = \mathbb{R}\backslash\{-12\}\\
&D_{f4}(x) = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}\\
&D_{f5}(x) = \mathbb{R}\\
&D_{f6}(x) = \mathbb{R}\backslash\{3, 1\}\\
&D_{f7}(x) = \mathbb{R}\backslash\{1\}\\
&D_{f8}(x) = \mathbb{R}\\
&D_{f9}(x) = \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -5\}\\
&D_{f10}(x) = \mathbb{R}\backslash\left\{2, -\frac{1}{3}\right\}
\end{aligned}$$

$ad \quad f0: \quad 3 \neq 0$

$ad \quad f4: \quad x^2 - 4 = 0 \quad a \quad pour \quad solutions \quad x = -2 \quad ou \quad x = 2$

$ad \quad f5: \quad x^2 + 1 = 0 \quad n'a \quad pas \quad de \quad solution \quad (x^2 + 1 \quad est \quad toujours \quad positif)$

$ad \quad f6: \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad a \quad pour \quad solutions \quad x = 3 \quad ou \quad x = 1 \quad (\Delta = 4)$

$ad \quad f7: \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad a \quad pour \quad solution \quad x = 1 \quad (\Delta = 0)$

$ad \quad f8: \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad n'a \quad pas \quad de \quad solution \quad (\Delta < 0)$

$ad \quad f10: \quad il \quad faut \quad que \quad x - 2 \neq 0, \quad donc \quad x \neq 2 \quad et \quad \dfrac{3x+1}{x-2} \neq 0,$

$donc \quad 3x + 1 \neq 0$

☞ **Retour**

Réponses :

f_0 :
$1-2x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$
$D_{f0} =]-\infty, \frac{1}{2}]$

f_1 :
$\frac{2x}{3} \geq 0 \Longleftrightarrow 2x \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$
$D_{f1} = [0, \infty[$

f_2 :
$x \geq 0$ et $x-1 \neq 0$
$\Longleftrightarrow x \geq 0$ et $x \neq 1$
$\Longleftrightarrow D_{f2} = [0,1[\bigcup]1,\infty[$

f_3 :
$1-x \geq 0$ et $x-1 \neq 0$
$\Longleftrightarrow x \leq 1$ et $x \neq 1$
$D_{f3} =]-\infty, 1[$

f_4 :
$4x^2 - 8x \geq 0$
$\Longleftrightarrow 4x(x-2) \geq 0$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
signe de $4x$	-	0	+	+	+
signe de $(x-2)$	-	-	-	0	+
signe de $4x(x-2)$	+	0	-	0	+

$\Longleftrightarrow D_{f4} = [-\infty, 0] \bigcup [2, \infty[$
en effet, pour ces valeurs de x (1ère ligne), $4x^2 - 8x$ est positif ou nul (dernière ligne)

f_5 :
$x \geq 0$ et $\sqrt{x} - 4 \neq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 4 \Longleftrightarrow x \geq 0$ et $x \neq 16$
$D_{f5} = [0, 16[\bigcup]16, \infty[$

f_6 :
$-\frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} < 0 \iff x < 0$
$D_{f6} = \mathbb{R}^*_-$

f_7 :
$-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 0 \iff x = 0$
$D_{f7} = \{0\}$

f_8 :
$x - x^3 \geq 0 \iff x(1-x)(1+x) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		-	-	-	0	+	+	+	
signe de $(1-x)$		+	+	+	+	+	1	-	
signe de $(1+x)$		-	0	+	+	+	1	+	
signe de $x - x^3$		+	0	-	0	+	0	-	

$D_{f8} =]-\infty, 1]\bigcup[0,1]$

f_9 :
$x \geq 0$ et $1 - \sqrt{x} \geq 0 \iff x \geq 0$ et $\sqrt{x} \leq 1 \iff x \geq 0$ et $x \leq 1$
$D_{f9} = [0,1]$

f_{10} :
$-2x^2 + x - 1 \geq 0$
Impossible, car $\Delta < 0$ et $-2 < 0$ donc $-2x^2 + x - 1 < 0$
$D_{f10} = \emptyset$

☞ **Retour**

Réponses :

f_0 :
$1-2x>0 \Longleftrightarrow x<\frac{1}{2}$
$D_{f0}=]-\infty,\frac{1}{2}[$

f_1 :
$\frac{2x}{3}>0 \Longleftrightarrow 2x>0 \Longleftrightarrow x>0$
$D_{f1}=]0,\infty[$

f_2 :
$x>0$ et $9x^2-1\neq 0$
$\Longleftrightarrow x>0$ et $x\neq\frac{1}{3}$ et $x\neq-\frac{1}{3}$
$D_{f2}=[0,\frac{1}{3}[\bigcup]\frac{1}{3},\infty[$

f_3 :
$1-x>0$ et $x+1\neq 0$
$\Longleftrightarrow x<1$ et $x\neq-1$
$D_{f3}=]-\infty,-1[\bigcup]-1,1[$

f_4 :
$4x^2-8x>0$
$\Longleftrightarrow 4x(x-2)>0$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
signe de $4x$	-	0	+	+	+
signe de $(x-2)$	-	-	-	0	+
signe de $4x(x-2)$	+	0	-	0	+

$\Longleftrightarrow D_{f4}=[-\infty,0[\bigcup]2,\infty[$
en effet, pour ces valeurs de x (1ère ligne), $4x^2-8x$ est positif ou nul (dernière ligne)

f_5 :
$x-1\geq 0$ et $x>0$ et $ln(x)\neq 0 \Longleftrightarrow x\geq 1$ et $x>0$ et $x\neq 1$
$D_{f5}=]1,\infty[$

f_6 :
$-\frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} < 0 \iff x < 0$
$D_{f6} = \mathbb{R}_-^*$

f_7 :
$-x^2 > 0 \iff x^2 < 0$ Impossible, un carré est positif ou nul !
$D_{f7} = \emptyset$

f_8 :
$x - x^3 > 0 \iff x(1-x)(1+x) > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de x		-	-	-	0	+	+	+	
signe de $(1-x)$		+	+	+	+	+	1	-	
signe de $(1+x)$		-	0	+	+	+	1	+	
signe de $x - x^3$		+	0	-	0	+	0	-	

$D_{f8} =]-\infty, 1[\bigcup]0, 1[$

f_9 :
$x > 0$ et $1 - lnx > 0 \iff x > 0$ et $lnx < 1 \iff x > 0$ et $x < e$
$D_{f9} =]0, e]$

f_{10} :
$2x^2 + x + 1 > 0$
Toujours vrai, car $\Delta < 0$ et $2 > 0$ donc $2x^2 + x + 1 > 0$
$D_{f10} = \mathbb{R}$

☞ **Retour**